20/12/19

ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ (συνεχείς τ.μ)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω συνεχής τ.μ X με σύνολο δυνατών τιμών το $I \subseteq \mathbb{R}$ και σ.π.π $f_X(x)$, γνωστή. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $y=g(x)$ και υποθέτουμε ότι:

i) Ο $y=g(x)$ είναι 1-1 μετασχηματισμός του I στο $g(I)=\{y : y=g(x), x\in I\}$

ii) Η $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) \neq 0$ και συνεχής για $y \in g(I)$. Τότε η τ.μ $Y=g(X)$ είναι συνεχής τ.μ με σύνολο δυνατών τιμών το $g(I)$

και σ.π.π :

$$\boxed{f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| , \quad y\in g(I)}$$

SKAG

Π.χ.

Έστω τ.μ. $X \sim Be(a,b)$

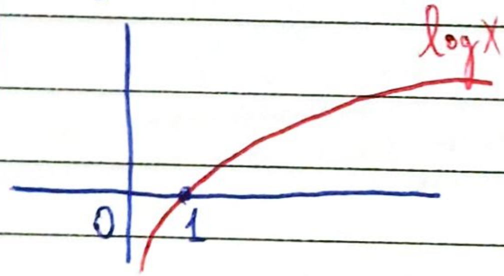
$Y = -\ln X$?

Αφού $X \sim Be(a,b)$, $a,b>0$, $\boxed{f_X(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}}$, $x \in (0,1) = I$

$B(a,b) = \Gamma(a+b)/\Gamma(a)\Gamma(b)$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $y = g(x) = -\ln x$, $x \in I = (0,1)$

Το $\boxed{g(I) = (0,\infty)}$



① g είναι 1-1

- Αν $g(x_1) = g(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$
- Γνησίως μονότονη

② Αφού g είναι 1-1 $\exists$ η g^{-1} και είναι:

$$y = -\ln X \Rightarrow \ln x = -y \Rightarrow \boxed{x = g^{-1}(y) = e^{-y}}$$

$$\frac{d}{dy} g^{-1} = \frac{d}{dy}(e^{-y}) = -e^{-y} \neq 0$$ και συνεχής $y \in g(I) = (0,+\infty)$

Ικανοποιείται τα ① κ' ②, άρα $Y = -\ln X$ συνεχής τ.μ. και $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|$

$$= \frac{1}{B(a,b)} (e^{-y})^{a-1} (1-e^{-y})^{b-1} \cdot |-e^{-y}|$$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{B(a,b)} e^{-ay}(1-e^{-y})^{b-1} \quad , y>0}$$

Αν $b=1$ $\quad \boxed{f_Y(y) = a e^{-ay}}, y>0 \quad , \quad Y \sim \text{Εκθ}(a)$

<u>Π.χ</u>

Έστω τ.μ X με κατανομή Pareto με σ.π.π $f_X(x) = \theta x^{-\theta-1}, x>1, \theta>0$

Κατανομή $Y = \ln X$?

<u>Θεωρούμε τον μετασχ.</u> $y = g(x) = \ln x \quad , x \in I = (1, \infty)$
με $g(I) = (0, \infty)$

① Η g είναι 1-1 , διότι $\frac{d}{dx} g(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad , x>1$
② Αφού g 1-1 $\exists$ η g^{-1} και είναι:

$$y = g(x) = \ln x \Rightarrow x = g^{-1}(y) = e^y \quad , y>0$$

Είναι $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = e^y \neq 0$ και συνεχής για $y>0$

Οι ① κ' ② ικανοποιούνται:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad , y>0$$

$$= \theta (e^y)^{-\theta-1} \cdot e^y \Rightarrow f_Y(y) = \theta e^{-\theta y} \quad , y>0 \qquad \boxed{Y \sim \text{Εκθ}(\theta)}$$

$\underline{\text{Πχ}}$

$X \sim U(0,1)$ κατανομή $Y = e^X$

$U(0,1) \rightarrow f_X(x) = \frac{1}{1-0} = 1 \quad , \quad 0 < x < 1$

Θεωρώ το μετασχ. $y = g(x) = e^x \quad , \quad x \in I = (0,1)$

$g(I) = \{ y : y = g(x) = e^x \; , \; x \in (0,1) \} = (e^0, e) = (1, e)$

① Η g 1-1 συνάρτηση του $I = (0,1)$ στο $g(I) = (1,e)$ γιατί $\frac{d}{dx} g(x) = e^x > 0$. Άρα η $g \uparrow$

② Αφού η g 1-1 $\exists g^{-1}$ και είναι:

$$Y = g(x) = e^x \Rightarrow g^{-1}(y) = x = \ln y$$

Ισχύει $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{1}{y} \neq 0$ και συνεχής $y \in (1,e)$

Τα ① κ' ② ισχύουν.

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad , \quad y \in (1,e)$$

$$= 1 \cdot \left| \frac{1}{y} \right| \overset{y>0}{=\!=} \boxed{\frac{1}{y}} \quad , \quad y \in (1,e)$$

SKAG

ΜΕΘΟΔΟΣ ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Έστω τ.μ X με γνωστή κατανομή. Ζητώ κατανομή της τ.μ $Y=g(X)$

Μέθοδος

Η ροπογεννήτρια της Y είναι $\boxed{m_Y(t)} \overset{op.}{=} E(e^{tY}) = \begin{cases} \sum e^{tg(x)} P_X(x), & X \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tg(x)} f_X(x), & X \text{ συνεχ.} \end{cases}$

$$E(e^{tY}) = E(e^{tg(x)})$$

Αν υπολογίσω την $m_Y(t)$ και η $m_Y(t)$ έχει τη μορφή ροπογεννήτριας γνωστής ειδικής κατανομής ΤΟΤΕ από το θεώρημα του μονοσήμαντου ροπογενν. η κατανομή της Y ταυτίζεται με την ειδική κατανομή

Π.χ

Έστω τ.μ X με σ.π.π $f_X(x) = \theta \cdot x^{-\theta-1}$, $x>1$, $\theta>0$

Κατανομή $Y=\ln X$?

$$m_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t\ln x}) = E(e^{\ln x^t}) = E(x^t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^t \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \int_1^{\infty} (x^t \cdot \theta \cdot x^{-\theta-1})\,dx = \theta \int_1^{\infty} x^{t-\theta-1}\,dx = \theta\left[\frac{x^{t-\theta-1+1}}{t-\theta-1+1}\right]_1^{\infty} = \theta\left[\frac{x^{t-\theta}}{t-\theta}\right]_1^{\infty}$$

Για $t>\theta$ δε συγκλίνει

Για $t<\theta$, $m_Y(t) = \theta\left[\frac{1}{(t-\theta)x^{(t-\theta)}}\right]_1^{\infty} = \theta\left(0 - \frac{1}{t-\theta}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{m_Y(t) = \frac{\theta}{\theta-t}, \quad t<\theta}$$

SKAG

Η ροπογεννήτρια της Εκθ(1) είναι $\frac{1}{1-t}$, $t<1$

Παρατηρώ ότι η μορφή της ροπογεννήτριας της τμ Υ είναι ίδια με τη ροπογεννήτρια της Εκθ(θ)
Άρα από ΘΕΩΡΗΜΑ $Y \sim$ Εκθ(θ)

Π.χ

Έστω τμ Χ με κατανομή Gumbel με α.σ.κ

$$F_X(x) = \exp\{-\exp[-(x-a)/b]\} = e^{-e^{-\frac{x-a}{b}}}, \quad x\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}, b>0$$

να βρεθεί η κατανομή της $Y = e^{-\frac{x-a}{b}}$

Μέθοδος α.σ.κ

$$F_Y(y) = P(Y\leq y) = P\left(e^{-\frac{x-a}{b}} \leq y\right) = P\left(-\frac{x-a}{b} \leq \ln y\right)$$

$$= P\left(\frac{x-a}{b} \geq -\ln y\right) \overset{b>0}{=} P(X-a \geq -b\cdot \ln y) = P(X \geq a - b\ln y)$$

$$= 1 - P(X \leq a - b\ln y) \overset{\text{ορ.}}{=} 1 - F_X(a - b\ln y)$$

$$= 1 - e^{-e^{-\frac{(a-b\ln y)-a}{b}}} = 1 - e^{-y}, \quad y>0$$

άρα $\boxed{F_Y(y) = 1 - e^{-y}}$, $y>0$

$Y \sim$ Εκθ(1)

$\lambda = 1$